Overgangsproblemer og brobygningsforsøg i uddannelsessystemet: tilfældet matematik

Carl Winsløw
www.ind.ku.dk/winslow

To typer af overgange

- epistemologiske og kognitive overgange

Critical transition is viewed as a learning situation that is found to involve a noticeable change of point of view. This change could become apparent as an epistemological obstacle, as a cognitive discontinuity or as a didactical gap. A transition would be identified as a necessity for entering into a different type of discourse or more broadly as changing "lenses" used to view the concept at hand (Yerushalmy, 2005)

Gueudet et al, 2016

- institutionelle overgange

Different groups of people share a common mathematical practice; a transition happens when an individual, such as a student, moves from one group to another (Gueudet et al., 2016)

→ ml. skoleinstitutioner, fra skole til erhverv

- Begge typer udforskes empirisk.

Epistemologiske overgange eller forhindringer

- Specifikke for et bestemt stykke *viden* (fx et begreb)

Eksempel. Overgangen fra naturlige tal til rationale tal (brøker)

Produktet af naturlige tal > faktorerne, fx : 2·3 > 3

Kan ikke generaliseres: fx $\frac{1}{2} \cdot 4 = 2 < 4$

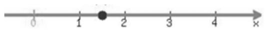
Det ligger i stoffet at gammel viden må forkastes eller i hvert fald revideres – her fx om hvordan man ganger, og om ordning

Kognitive forhindringer (Piaget, Duval,…)

- Specifikke for den lærende (fx et alderstrin)

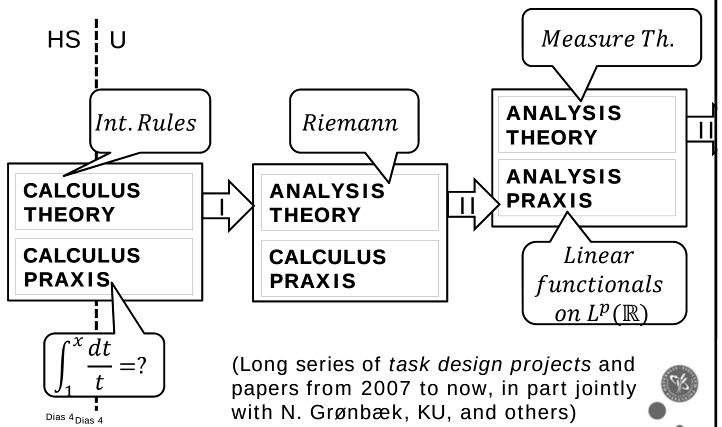
Eksempel: matematiske repræsentationer af tal

Det er afgørende for videregående arbejde med tal, at man kan opfatte ret forskellige "semiotiske tegn" som repræsentationer af samme tal, fx

$1\frac{1}{2}$, 1.5, 1.49999… ,  , $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{4}$, 

Tallet er ikke repræsentationen! ("ceci n'est pas une pipe")
Det er svært for mange børn (og voksne)!

Epistemologiske overgange i universitetsstudier
Eksempel: Calculus/Analysis på matematikuddannelser



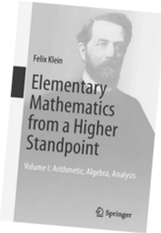
(Long series of *task design projects* and papers from 2007 to now, in part jointly with N. Grønbæk, KU, and others)

Dias 4

Institutionelle overgange

Klassisk eksempel: Klein's dobbelte diskontinuitet (1908)

At the beginning of his studies, the young student is faced with problems that in no way remind him of the [mathematical] things he worked with in school; naturally he then forgets these matters quickly and thoroughly. If he becomes a teacher after having finished his studies, he must suddenly teach this time honoured elementary mathematics in a school like fashion; and as he cannot by himself see the connection between this task and university mathematics (...) his university studies become just a more or less pleasant memory which has no influence on his teaching.



Grønbæk & W., 2014

Matematik i folkeskolen → Matematik i gymnasiet

Elev fra sjællandsk STX (1.g):

"Indtil videre synes jeg det hele er svært, jeg har altid haft svært ved matematik og at niveauet er blevet sat op har ikke hjulpet på det. Jeg synes, at der bliver stillet alt for høje krav, for dem der kan finde ud af det er det jo fint, men for dem som har svært ved det, er det ikke særlig godt. Plus den lærer vi havde i grundforløbet var forfærdelig for at sige det mildt. Hvis man ikke kunne finde ud af det, ville han ikke hjælpe en, og han var dårlig til at undervise, og det gjorde det endnu sværere at lære noget, og det er hovedsageligt grunden til, at jeg ikke lærte noget matematik i grundforløbet"

(Ebbensgaard, Jacobsen & Ulriksen, 2014, s. 66).

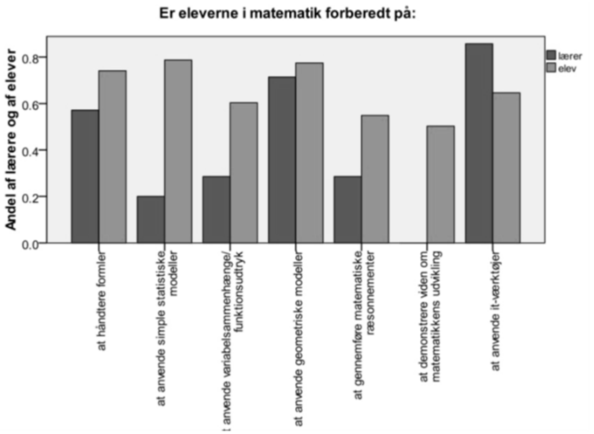
Lærerne (selvregulerede interview):

- Grundskole: Uformelt; konkret; praksis
- Gymnasium: Formelt; abstrakt; teori

(Ebbensgaard, Jacobsen & Ulriksen, 2014, s. 71).

Matematik i folkeskolen → Matematik i gymnasiet

Diskrepans i vurdering af forudsætninger (Lindenskov, 2009)



Vi zoomer ind: Algebra-problemet

International forskning viser konsistent, at en stærk (stærkeste?) prædiktor for succes i gymnasial matematik, når man ser på børn i 5./6. skoleår, er **færdighed i brøkregning** (fx $\frac{15}{2} \cdot \frac{4}{5}$)

Det giver også mening ift. matematisk indhold:

Brøkregning ←→ Basal Algebra ←→ Al videregående matematik

OPGAVE	FORSØGT	RIGTIGT
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	96%	**66%**
$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}$	90%	**55%**
$\frac{3}{4}\cdot 2$	88%	**50%**
$\frac{3}{5}:2$	79%	**31%**

Folkeskolens afgangsprøve **9. kl.**, 2009-2011

National Achievement Test (Japan, **6. kl.**):

Konsistent **> 90%** rigtigt i *alle* fire regningsarter

STX Matematik B, sommer 2019

Reducér $(a+b)^2 - b \cdot (2a+b)$

Svar: $a^2 + b^2 + 2ab - 2ab - b^2 = a^2$

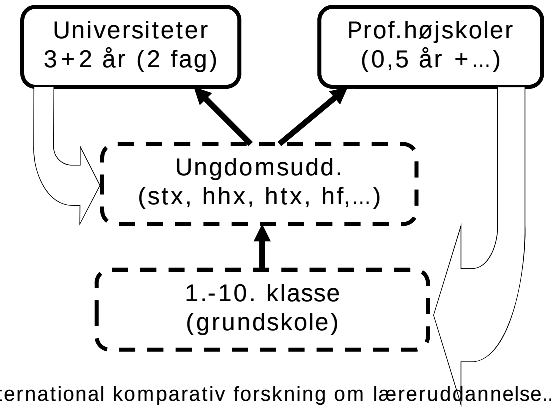
Stof som hører til 7.-9.kl.:

- kvadratet på en sum $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- simple potensregler $b \cdot b = b^2$
- distributive lov $b \cdot (2a+b) = b \cdot 2a + b \cdot b$
- kommutative lov $b \cdot 2a = 2ab$

24% af stikprøve kunne regne opgaven (efter 2. G)

KØBENHAVNS UNIVERSITET Institut for Naturfagenes Didaktik

Fag i folkeskolen → Fag i gymnasiet
Læreruddannelse i DK – en kilde til overgangsproblemer?



→ International komparativ forskning om læreruddannelse…
→ Nationale projekter som tager forholdene for givet

KØBENHAVNS UNIVERSITET Institut for Naturfagenes Didaktik

MatematikBroen
Fra grundskole til gymnasium

Gennemført med støtte fra A.P. Møller Fonden

2015-2016
Partnere: Københavns Kommune, Silkeborg Kommune, Gefion Gymnasium, Silkeborg Gymnasium, Professionshøjskolen UCC, VIA University College, og Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet.

KØBENHAVNS UNIVERSITET Institut for Naturfagenes Didaktik

Projektet sigtede på at udvikle undervisningsmateriale med tilhørende efteruddannelsesaktiviteter for folkeskolens matematiklærere, som kan bidrage til at øge indsatsen i folkeskolens ældste klasser indenfor områder af matematikfaget, som i særlig grad vurderes at skabe problemer for eleverne når de starter i 1. G - specifikt, elementær algebra (bogstavregning, ligningsløsning etc.) og simpel matematisk modellering…
(Rapport, 2016)

Overordnet idé:

- en gruppe af gymnasielærere fra Silkeborg og Gefion udarbejdede, med fagligt input fra universitet og PH, et undervisningsmateriale til grundskolen, med henblik på at styrke 9. klasses elevers greb om de nævnte områder.
- Der afholdtes kurser for grundskolelærere i de to kommuner I foråret 2015, mhp. at afvikle forløb for 9. klasser i forår 2016
- Elever fra 2015 (uden forløb) og fra 2016 (med forløb) gives diagnostisk test baseret på referencemodel, resultater sammenlignes

KØBENHAVNS UNIVERSITET Institut for Naturfagenes Didaktik

Forskerbidrag til Matematikbroen

- Internat august 2015 (projektpartnere)
  - Fremlagde praxeologisk referencemodel (senere)
  - Introduktion til diagnostiske test
  - Introduktion til deling af lærerviden gennem åbne lektioner
  - Forskningsbaseret bidrag til udviklingen af materialer (kursus, forløb)
- Kursusafholdelse
  - Observerede kursusafholdelsen
- Test
  - På basis af referencemodel udarbejdedes diagnotisk test
  - Testen gennemført på Gefion og i Silkeborg (ca. 20 elever hvert sted i 2015 og 2016) - elever tilfældigt valgt vha. R
  - Detaljeret statistik for enkeltopgaver, total-score mv.
- Elektronisk evalueringsskema
  - Lærergrupper (oplevelse af kursusforløb)
  - Elever som deltog i "matematikbro-forløb"
- Rapport (2017)
  - https://www.ind.ku.dk/publikationer/inds_skriftserie/nr.-492017-matematikbroen/

Dias 13

KØBENHAVNS UNIVERSITET Institut for Naturfagenes Didaktik

Referencemodellen – 89 teknikker

Categorization	Techniques	FSA	ST	stx
Laws	τ_1: Associative law for multiplication	X	X	X
	τ_2: Commutative law for multiplication	X	X	X
	τ_3: Distributive law $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	X	X	X
Hierarchy	τ_4: $\cdot$ and : before + and −	X	X	X
	τ_5: Roots and powers before $+, -, \cdot, :$	X	X	X
	τ_6: Brackets before all other arithmetic operations	X	X	X
Equation solving	τ_7: $+, -, \cdot, :$ on both sides of the equality sign	X	X	X
	τ_8: Multiply crosswise $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$			X
	τ_9: Set two expressions equal to each other	X		X
	τ_{10}: Subtract two equations from each other	X		X
	τ_{11}: Substitution of algebraic expression	X		X
	τ_{12}: Zero-divisor law $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$			X
	τ_{13}: Take logarithm on both sides of =			X
	τ_{14}: Multiply crosswise reverse $ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$			X
	τ_{15}: $x^n = c \Rightarrow x = \sqrt[n]{c}, n \in \mathbb{R}$	X		X

Dias 14

Caroline Poulsen, speciale, KU 2015

KØBENHAVNS UNIVERSITET Institut for Naturfagenes Didaktik

Eksempler fra testen

Reducer følgende udtryk

$$x \cdot (3+x) - 3x$$

Her glemmer mange at gange ind på begge led

Mange springer over opgaven at hæve parenteser i:

$$(3T+9)^2$$

Efter uden problemer at gøre det samme for:

$$(a+2)(2+a)$$

Eleverne løser:

$$x^2 - 3 = 13$$

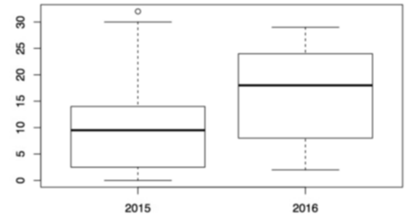
Men kan ikke løse:

$$x^3 = -8$$

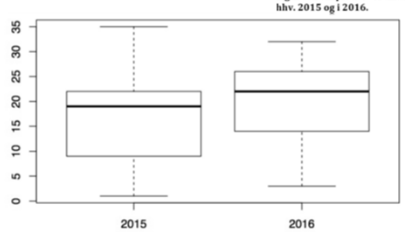
Dias 15

KØBENHAVNS UNIVERSITET Institut for Naturfagenes Didaktik

Globalt:
- signifikant øgning af middelscore i København
- ingen effekt på "bundgruppe"
- reduceret spredning



Figur 7. Boksplots over antallet af point som eleverne på Gefion Gymnasium samlede i hhv. 2015 og i 2016.



Figur 8. Figuren viser to boksplot over antallet af point som eleverne på Silkeborg Gymnasium samlede i hhv. 2015 og i 2016.

Mange (mere) interessante resultater vedr. enkeltopgaver

KØBENHAVNS UNIVERSITET Institut for Naturfagenes Didaktik

Konklusioner

Flere tilgange til overgangsproblemer:

- **Deskriptive**
  - Lokale, epistemologiske/kognitive (indenfor et fag): hvad er det eleverne har svært ved?
    - Her kræves *referencemodeller* som gør det muligt at isolere specifikke vanskeligheder
  - Mere globale (for et fag som helhed, eller mere generelt): hvordan opfatter lærere og elever overgange? Hvilke institutionelle og/eller kognitive forhold kan forklare det?
    - Her kræves ofte internationale sammenligninger
- **Intervenerende**
  - Lokalt: med basis i fagspecifik referencemodel for velafgrænset *epistemologisk* overgangsproblem
  - Mere sjældent, globalt/institutionelt: større forsøg, fx med undervisningen i institutionerne, eller – i princippet - med læreruddannelse (baseret på international forskning)

Dias 17